

Zlatý řez v perspektivním prostoru



Bohumír Tichánek

Zrakové zážitky tvaruje perspektiva. Souhra lidských smyslových vjemů vede k názoru, že jejich příčinou je hmota. Ta má být jednoduše rozmístěná v lineárním Euklidově prostoru. Jenže matematizace takového prostoru často nedává výsledek. Počítá nekonečné iracionality, například Ludolfovo číslo π . Sebevědomě popisujeme Vesmír zaokrouhlováním neznámých výsledků. Neexistujících výsledků.

Naopak jednoduše pojatý prostor perspektivního vidění lze matematizovat vždy racionálně. Poskytne konečný výsledek. Navíc do perspektivního prostoru lze přecházet z diskrétního (bodového). Euklidův prostor se vynechá.

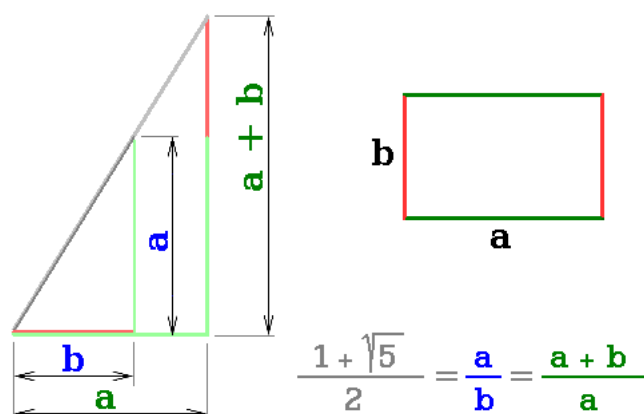
Matematika stanovila poměr zlatého řezu 1:1,618... Užitím iracionálního - neskutečného čísla.

Řešení v jiné geometrii, v perspektivním prostoru, vyčísluje ten samý zlatý řez jiným poměrem.

* * *

OBSAH

1. Úvod
 2. Euklidův prostor
 3. Bodový a perspektivní prostor
 4. Racionální obdélník
 5. Zlatý řez proměnlivě vnímaný
 - 5.1. Obdélník těsně u očí
 - 5.2. Obdélník pozorovateli vzdálený
 6. Zobecnění
 7. Závěr
- Literatura



Obr. 1. Obdélník zlatého řezu. Poměr jeho stran v geometrii a v matematice

1. Úvod

Zlatý řez vyjadřuje mimořádný poměr dvou stran obdélníka. Vyznačuje se ladností, pro kterou lidé vybírají tento poměr stran - když dbají svého dobrého pocitu. Zlatý řez má mít uplatnění nejen ve výtvarném umění, fotografii a architektuře, ale i v hudbě, v biologii i v posuzování rozměrů lidského těla.

Matematika zdůvodňuje, co je poměrem zlatého řezu.

Obrázek se zlatým řezem ukazuje dva podobné trojúhelníky (obr. 1). Menší má odvěsny: b a a , větší: a a $(a+b)$. Znázorňují poměry vyjádřené rovnicí.

Vztah dvou stran obdélníka zlatého řezu je následovný. Poměr součtu obou stran $a + b$ ku delší straně a je roven poměru delší strany a ku kratší b . Vypočítaný poměr je

$$a/b = (1 + \text{odmocnina z } 5)/2.$$

Je to poměr iracionální: $1 : 1,6180339887498\dots$

Gustav Theodor Fechner ověřoval jev zlatého řezu hodnocením lidských pocitů a názorů a potvrdil ho [1].

Ještě i ve 20. století byl jev znovu posuzovaný - odmítaný nebo přijímaný. Upřednostňování obdélníka s takovým poměrem stran je staré tisíce let, proto tento přístup nepodcením.

Navíc poměr zlatého řezu ukazuje nejen geometrie našich zážitků, ale zásadním způsobem i samotná matematika. Našla jej v oboru Fibonacciho čísel.

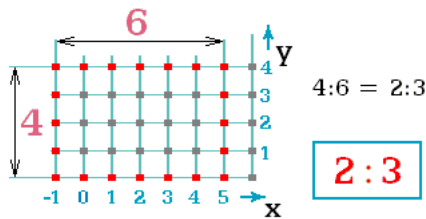
2. Euklidův prostor

Obdélník sestrojím v poměru stran $(1 + \sqrt{5})/2$ a to v Euklidově prostoru (obr. 2). Svislou stranu obdélníka zvolím $b = 2$, a delší vodorovnou stranu $a = 1 + \sqrt{5}$. Poměr zlatého řezu je daný iracionálním číslem, jak určuje odmocnina z 5. Tedy nepřesně.

3. Bodový a perspektivní prostor

Dál poměr prověříme v perspektivním a v diskretním prostoru. Perspektiva má jinou geometrii, proto i matematický poměr bude jiný. Jestliže výraz $(1 + \sqrt{5})/2$ není ničím vyjímečný, může se to v diskretním prostoru změnit. Přepočítání stran obdélníka $b = 2$, $a = 1 + \sqrt{5}$ je snadný; výraz určuje, do kterého místa obrazec zakreslit. Souřadnice bodů $[-1;0]$, $[\sqrt{5};0]$, $[0;2]$ umocním na druhou. Nové souřadnice rozmístím v perspektivním prostoru (obr. 3).

- Jednotková délka se převádí beze změny – na vodorovné ose do úseku od 0 k záporné jedničce.
- Délku $\sqrt{5}$ nahradí délka 5.
- Svislou délku $b = 2$ nahradí délka 4.



Obr. 4. Zlatý řez v diskretním prostoru

Perspektiva: Matematika vyjádřila délky stran bez zaokrouhlení – přesně.

Obr. 3. Zlatý řez v perspektivním a v Euklidově prostoru

4. Racionální obdélník

Na obrázku vznikl obdélník o stranách $b = 4$ a $a = 6$. Příčinou odlišného údaje o délkách je jiný průběh cejchování os.

Z diskretního do perspektivního prostoru lze body převádět přesně. Přitom dodrží kartézské souřadnice a vzdálenost od počátku. Nevyřešitelné iracionality se nevyskytnou. Pak perspektivní zážitky posuzují, že jsou odvozené z diskretního prostoru (obr. 4). Ten ať je zásobárnou údajů pro smyslové vjemy tvořící (obr. 5). Perspektivní prostor užívá osy cejchované kvadratickým měřítkem. V odvětvém zrakovém prostoru je poměr stran již nikoliv $1:1,618\dots$, vždy nepřesných, ale přesně $2:3$.

Obr. 5. Zlatý řez v perspektivním prostoru

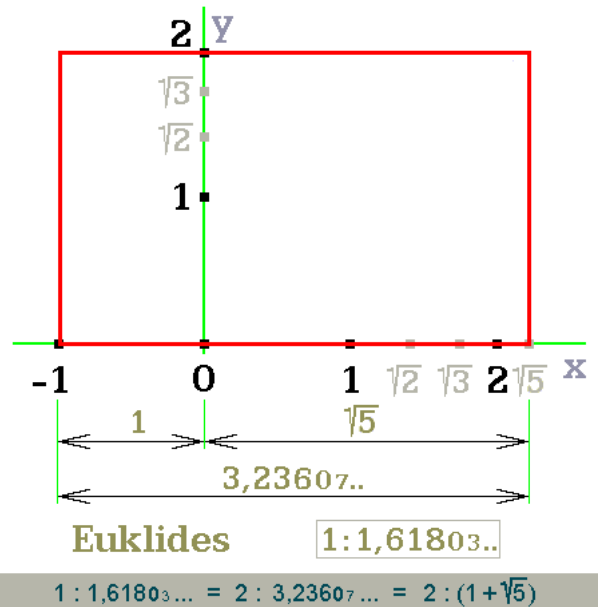
5. Zlatý řez proměnlivě vnímaný

Délky ve vjemech pozorovaného objektu se mění závisle na naší vzdálenosti od něho. Tomu je podrobený i obdélník zlatého řezu (obr. 6).

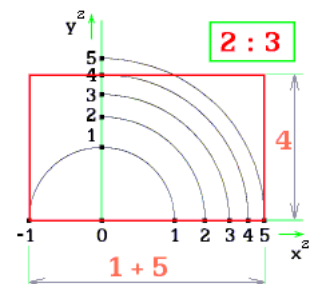
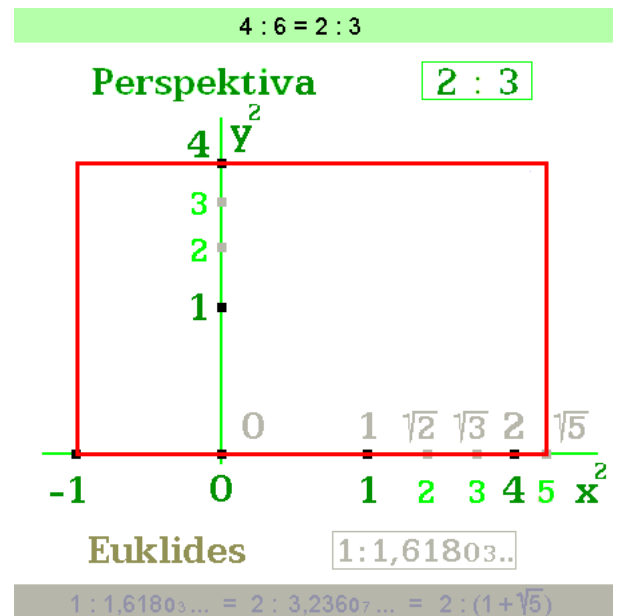
5.1. Obdélník těsně u očí

Mějme pozorovatele, jenž má veliký obdélník těsně před očima, namalovaný na vysoké zdi. Delší strana měří například 30 metrů.

Vjem v postavení A odpovídá odvození iracionálního výrazu $(1 + \sqrt{5})/2$ Euklidova prostoru. Kdežto je-li pozorovatel B umístěný ve vrcholu obdélníka, pak mu perspektiva zkrátí delší stranu výrazněji než tomu v postavení A. To proto, že délku 0-1 vnímáme větší než délku 5-6.



Obr. 2. Zlatý řez v Euklidově prostoru



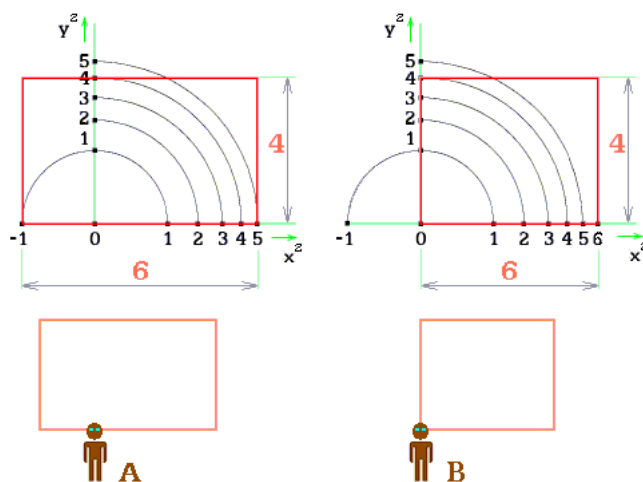
5.2. Obdélník pozorovateli vzdálený

Obraz visí na stěně a má strany poměru zlatého řezu, zde $1,62 \times 1$ metr (obr. 7). Pozorovatel je od jeho středu vzdálený 4 metry. Jak moc se uplatní perspektivní zkreslení na vjem dvou stran obrazu?

V Euklidově prostoru počítám Pythagorovou větou, jaké jsou tři různé vzdálenosti pozorovatele od tří bodů na obraze. Vychází, že pozorovatelovy vzdálenosti od středu obrazu, od vrchu a zprava se liší jen málo: 4 metry, 4,03 m a 4,08 m.

Pozorovatel vnímá zlatý řez, protože všechny čtyři strany obdélníka jsou od něj vzdálené skoro stejně. Nepatrné zkreslení perspektivou nevnímá.

Vjem zlatého řezu souvisí s pozorovatelovou vzdáleností od objektu. Ve větší vzdálenosti není vjem zkreslený.



Obr. 6. Vjem pozorovatele A a B mění perspektiva

Obr. 7. Pozorovatel je hodně vzdálený od obrazu

6. Zobecnění

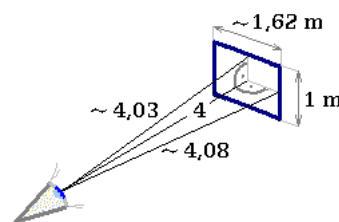
Vjem obdélníka zlatého řezu je podmíněný místem, odkud objekt pozorujeme. Můžeme jej vidět v poměru stran 2:3, hodnoceno perspektivní geometrií.

Neposoudím, které různé vlivy nás k oblibě zlatého řezu vedou. Zda jsou obsažené v našem vědomí či v konstrukci Vesmíru, což může být totožnou záležitostí. Jedna zajímavost se však nabízí.

Je to jeden z obdélníků, jejichž poměry délek stran jsou určeny nejmenšími přirozenými čísly. Sestavení obdélníka 2:3 spotřebuje $2+2+3+3 = 10$ jednotkových délek. Nejmenší obdélník by měl strany v poměru délek 1:2, sousední nejúspornější by byl 1:3, další úsporný je potom jak 1:4, tak i obdélník zlatého řezu 2:3. Není to tedy žádný lhostejný poměr například 214:383. Avšak většinou, v současnosti, nedbáme promyšlené konstrukce Vesmíru. Svět se měl vytvořit, i se svým zlatým řezem, zcela bez návrhu, lhostejně? Sám od sebe?

V diskretním a i v perspektivním prostoru se objevil zajímavý poměr přirozených čísel 2:3. Kdežto v Euklidově prostoru to byl jakoby lhostejný poměr $1:1,618\dots$, navíc vyjádřitelný jen přibližně. Vždyť i Euklidův lineární prostor mohl mít zlatý řez např. 3:5. Nestalo se, tudíž zjištěné řešení zaměřuje pozornost na perspektivní prostor, na lidské vnímání.

Rovněž kmitočty tónů libozvukných hudebních akordů jsou dány poměrem právě malých celých čísel.



7. Závěr

Jestliže ten samý jev můžeme hodnotit těmito dvěma způsoby, pak který z užitých prostorů lépe vystihuje skutečnost našeho světa? Ačkoliv Euklidův prostor je vhodný pro obvyklá výpočetní využití, naopak diskretní prostor nepoužívá zaokrouhlení; zdárněji popisuje náš svět. Umožňuje absolutně přesné výpočty.

Naopak [prostor, jenž pro některé geometrické vlastnosti našeho Vesmíru nemá řešení, jeho geometrii nevystihuje](#). Což posuzuji jako axiom: konečné velikosti fyzikálních veličin vyjadřují racionální čísla. Pokud to není splněno, pak vybraný geometrický prostor není obrazem našeho světa.

Výběrem, mezi matematikou Euklidova a perspektivního prostoru, lze posoudit, zda základem fyziky Vesmíru je lidské vnímání nebo lineárně rozložená hmota. Skrývá se za perspektivním viděním Euklidův anebo bodový prostor? Je-li základem světa právě lidské vnímání, pak svět je [promyšleně vytvořenou realitou](#).

Literatura: [1] Mario Livio: Zlatý řez. Nakladatelství Dokořán, Praha 2006

